TITLE:

C^3のコンパクト化

AUTHOR(S):

古島, 幹雄

CITATION:

古島, 幹雄. C^3のコンパクト化. 代数幾何学シンポジューム記録 1989, 1989: 93-107

ISSUE DATE:

1989

URL:

http://hdl.handle.net/2433/212697

代数幾何学シンポジウム記録
1989年度　pp.93-107

$\mathbb{C}^3$ の compact 化

琉球大・教育　　古島幹雄

§0. 序

X を n 次元連結コンパクト複素多様体とし，Y を X における解析的内部分集合とする．2つ組 (X, Y) が $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化であるとは，$X \setminus Y$ が $\mathbb{C}^n$ に双正則同型であるときをいう．このとき，F. Hirzebruch により次の問題が提起された．

<u>問題</u>　第2ベッチ数 $b_2 = 1$ なる $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化をすべて決定せよ．

まず，$n=1$ のときは，容易に $(X, Y) \cong (\mathbb{P}^1, \infty)$ であり，$n=2$ のときは，Remmert - Van de Ven [11] により，$(X, Y) \cong (\mathbb{P}^2, \text{a line } \mathbb{P}^1)$ であることが示された．

そこで，我々は，$n=3$ の時を考察する．最近，Th. Peternell 等により，$n=3$ の時，$b_2=1$ なる任意の解析

的コンパクト化 X は射影代数的であることが示されたらしいので，我々は，以後，X は射影代数的と仮定する．

注意　$n \geqq 4$ に対しては，X の射影代数性は未解決である．又，$b_2 = 2$ なる射影代数的でない $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化が存在するので，$b_2 = 1$ の仮定は本質的である．

§1．基本的事実

(X, Y) を $b_2(X) = 1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化で，とくに，X は射影代数的と仮定する．そのとき，次を得る．

命題 1.1 ([2])　(1)　Y は X 上の既約で，豊富な因子である．

(2)　$H^i(X; \mathbb{Z}) \cong H^i(Y; \mathbb{Z})$，とくに

(ア)　$H^1(X; \mathbb{Z}) \cong H^1(Y; \mathbb{Z}) \cong 0$

(イ)　$H^2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot c_1(\mathcal{O}_X(Y))$

$$\begin{array}{c} H^2(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}_X(Y)) \\ \wr\Vert \\ H^2(Y; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \cdot c_1(\mathcal{O}_Y(Y)) \end{array}$$

(3)　$K_X = -r \cdot Y$　$(r > 0,\ r \in \mathbb{Z})$，但し，$K_X$ は X の標準因子．特に，X は第1種 Fano 3-fold である．

命題1.1-(3) における整数 $r>0$ を X の <u>index</u> という.

<u>定理</u>1.2 (c.f. [8]).

(1) Index $r \geqq 4 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{P}^3$, a plane $\mathbb{P}^2)$

(2) Index $r = 3 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, 但し, $\mathbb{Q}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ は非特異2次超曲面で, $\mathbb{Q}_0^2$ は2次錐.

これより, 残るは, Index $r \leqq 2$ の場合の (X, Y) の構造である.

§2. Index $r = 2$ の場合

V_5 を index 2, genus $g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1 = 21$ の第1種 Fano 3-fold, 即ち, $\mathbb{P}^4$ 内の lines の Grassmann $G(2,5) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$ の余次元3の部分空間 $\mathbb{P}^6$ による切断とする(c.f. [1], [8]). 向井-梅村 [10] により, $V_5 \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ の定義式は

$$\begin{cases} x_0x_4 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 = 0 \quad , \quad x_1x_6 - 3x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0 \\ x_0x_5 - 3x_1x_4 + 2x_2x_3 = 0 \quad , \quad x_2x_6 - 4x_3x_5 + 3x_4^2 = 0 \\ x_0x_6 - 9x_2x_4 + 8x_3^2 = 0 \end{cases}$$

, (但し, $(x_0 : \quad : x_6)$ は $\mathbb{P}^6$ の同次座標) で与えられる. 実際, index 2, $g=21$

の第1種 Fano 3-fold はすべて射影同値である(c.f. [8]).
そこで, $H_5^0 := V_5 \cap \{x_5 = 0\}$, $H_5^\infty := V_5 \cap \{x_6 = 0\}$ なる超平面切断を与える. すると, 次が分る:

(1) $\mathrm{Sing}\, H_5^0$ は唯1個の A_4-型の有理2重点よりなる.

(2) $\mathrm{Sing}\, H_5^\infty =: l$ は法束 $N_{l|V_5} \cong \mathcal{O}_l(-1) \oplus \mathcal{O}_l(1)$ をもつ V_5 における直線である. 特に, H_5^∞ は non-normal.

(3) $V_5 \setminus H_5^0 \cong \mathbb{C}^3$, $V_5 \setminus H_5^\infty \cong \mathbb{C}^3$.

こうして, (V_5, H_5^0), (V_5, H_5^∞) は index $r = 2$ の $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化の例を与える.

一方, (V_5, H_5^0), (V_5, H_5^∞) は以下のようにしても構成できる:

非特異2次超曲面 $\mathbb{Q}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ 上に直線 f をとる. $0 \neq \infty \in f$ を f 上の異なる2点とする. Q_0, Q_∞ にて, 0, ∞ をそれぞれ頂点にもつ2次の錐とする. すると, $Q_0 \cdot Q_\infty = 2f$ を得る. Q_∞ に含まれる非特異3次有理曲線 C で, 0, ∞ を通るものがとれる. $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ を C に沿う blowing up とし, $C' = \varphi^{-1}(C)$ $(\cong \mathbb{F}_3)$ とおく. $\overline{Q_0}$, $\overline{Q_\infty}$ をそれぞれ, Q_0, Q_∞ の W における proper transform とする. すると, $\overline{Q_\infty} \cong \mathbb{F}_2$ であり, この $\overline{Q_\infty}$ が曲線につぶれる. こうして得られた非特異3-fold が index 2, $g = 21$ の第1種 Fano 3-fold V_5 である. $\sigma : W \longrightarrow V_5$ をこの

contraction morphism とする．

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ V_5 \arrow[rr, dashed, "\pi_\ell"] & & Q^3 \end{tikzcd}$$

(D−1)

$\sigma(\overline{Q}_\infty) =: \ell$ は $N_{\ell|V_5} \cong \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)$ なる（V_5における）直線である．

右の（D−1）は，V_5 のこの直線 ℓ からの射影 $\pi_\ell : V_5 \dashrightarrow Q^3$ の不定点解消を与えている．

(4) $H_5^\infty \cong \sigma(C')$．とくに，$H_5^\infty$ は $\ell = \sigma(\overline{Q}_\infty)$ と交わる直線全体で張られる ruled surface である．

(5) $H_5^0 \cong \sigma(\overline{Q}_0)$，とくに，$\ell = \sigma(\overline{Q}_\infty)$ は H_5^0 に含まれる，V_5における唯1つの直線である．

(6) $V_5 - H_5^\infty \overset{\sigma}{\cong} W - (C' \cup \overline{Q}_\infty) \overset{\varphi}{\cong} Q^3 - Q_\infty \cong \mathbb{C}^3$

(7) $V_5 - H_5^0 \cong W - (C' \cup \overline{Q}_0) \cong \mathbb{C}^3$ (c.f. [2]).

このことからも，(V_5, H_5^0)，(V_5, H_5^∞) が $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化であることが分る．実は，次がいえる．

<u>定理</u>2.1 ([2], [7], [12]). Index $r = 2$ のときの $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化は，同型をのぞき，(V_5, H_5^0) 又は (V_5, H_5^∞) に限る．

$\mathbb{C}^3$ のコンパクト化としての Fano 3-fold V_5 の詳しい構造については [6] [7] を見て下さい。

§3. Index $r = 1$ の場合

この場合, X は index 1 の第1種 Fano 3-fold で Y はその特異点をもつ超平面切断である.

<u>定理</u> 3.1 ([4]). Y は non-normal である.

(証明の方針). Y を normal として矛盾を導く.
$K_X = -Y$ より, Y は自明な標準層 $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$ をもつ.

$$S := \{x \in \operatorname{Sing} Y \ ; \ x \text{ は有理型特異点でない}\}$$

とおく. $\pi : \tilde{Y} \to Y$ を最小特異点除去とし, $\pi^{-1}(S) =: C = \bigcup C_i$ とおく. $\operatorname{Sing} Y \setminus S$ は有理2重点よりなる.

<u>補題</u> 3.2 (1) $-K_{\tilde{Y}} = \sum m_i C_i \quad (m_i > 0, \ m_i \in \mathbb{Z})$

(2) 多重種数 $P_m(\tilde{Y}) = 0 \quad (\forall m > 0)$

(3) $q := h^1(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \frac{1}{2} b_3(X)$

<u>系</u>. $\tilde{Y}$ は rational surface 又は genus q のコンパクトリーマン面上の ruled surface.

<u>補題</u> 3.3 (梅津[13]). $S = \{x_0\}$ (1点) で $p_g(x_0) = q + 1$.

<u>命題</u>3.4 ([3]). $0 \leqq q \leqq 3$, 特に, $q = 3$ のときは $\tilde{Y}$ は genus 3 のコンパクトリーマン面上の $\mathbb{P}^1$−束である.

<u>補題</u>3.5 (Iskovskih の分類表 [8]).

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
q	52	30	20	14	10	7	5	3	2	0

ここに, $q = \frac{1}{2} b_3(X)$, $g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$.

命題3.4, 補題3.6 より, $(g, q) = (9, 3), (10, 2), (12, 0)$ を得るが, $\tilde{Y}$ の構造を詳しく見ることにより,

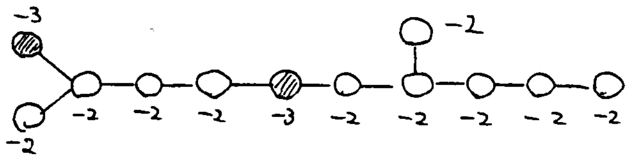
<u>命題</u>3.6. $(g, q) = (12, 0)$, 即ち, X は index 1 genus 12 の第1種 Fano 3-fold で, その超平面切断 Y は rational surface である. 特に, $S = \{x_0\}$ は最小楕円型特異点である.

Laufer [9] による最小楕円型特異点の分類結果を細かく見ることにより, Y の特異点集合 Sing Y について,

<u>命題</u>3.7. Sing Y は次のいずれかである

(a) $\mathrm{Sing}\, Y = S = \{x_0\}$ (1点) で $\pi^{-1}(x_0) = C$ の

dual graph は：



(b) $\mathrm{Sing}\, Y = \{x_0, y_0\}$ (2点) で, $\pi^{-1}(x_0) = C$ は $(C^2) = -2$ なる1コの cusp をもつ $\mathbb{P}^1$ であり, y_0 は A_{10}-型 の有理2重点である

Case (a) が起きない事： $\mathrm{Sing}\, Y = \{x_0\}$ からの3重射影は X から $\mathbb{P}^3$ への rational map $\pi_{3x_0} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ を定める. Y の最小特異点除去 $\tilde{Y}$ を調べることにより, $x_0 \in X$ を通る X 内の line は存在せず, x_0 を通る X の conic は唯1つ存在することが分る. それを γ とする. $\sigma_1 : X_1 \longrightarrow X$ を x_0 での blowing up とし, $E := \sigma_1^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^2$ とおく. γ_1 を γ の X_1 における proper transform とすると, linear system $|\sigma_1^* H - 3E|$ (但し $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$) の base locus $\mathrm{Bs}|\sigma_1^* H - 3E| = \gamma_1$ である. 又, γ_1 の X_1 における法束は $N_{\gamma_1|X_1} \cong \mathcal{O}_{\gamma_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\gamma_1}$ が分る.

今, linear system $|\sigma_1^* H - 3E|$ で定義される rational map $\Phi := \Phi_{|\sigma_1^* H - 3E|} : X_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ の不定点解消を注意深

く見ることにより，

(i) $\Phi(X_1) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は2次超曲面

(ii) γ_1 に沿う X_1 の flip $\rho : X_1 \dashrightarrow W_1$ および W_1 から $\Phi(X_1)$ の上への morphism

$$\exists\, \varphi : W_1 \longrightarrow \Phi(X_1)$$

が存在して，次は可換：

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W_1 \arrow[d, "\varphi"] & \\ X \arrow[r, dashed, "\pi_{3x_0}"'] & \Phi(X_1) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathbb{P}^3 \\ & \mathbb{Q}^2 & \end{tikzcd}$$

(iii) $\Phi(X_1) \cong \mathbb{Q}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は非特異2次超曲面で，$\varphi : W_1 \longrightarrow \Phi(X_1) \cong \mathbb{Q}^2$ は conic bundle の構造をもつ．

さて，(iii) より，$b_2(W_1) = b_2(\mathbb{Q}^2) + 1 = 3$．
一方，$2 = b_2(X_1) = b_2(W_1)$．こうして矛盾．
よって，Case (a) は起きない．

<u>Case (b) が起きない事</u>. Y の x_0 での重複度は2である. $\sigma_1 : X_1 \to X$ を x_0 での blowing up とし, $E := \sigma_1^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^2$ とおく. Y_1 を Y の X_1 における proper transform とすると, $Y_1 \cap E = 2L$ (但し, L は $E \cong \mathbb{P}^2$ における line). $\sigma_2 : X_2 \to X_1$ を L に沿う blowing up とし, $L' := \sigma_2^{-1}(L)\ (\cong \mathbb{F}_2)$ とおく. そこで, X_2 上に linear system $\mathcal{L} := |\sigma_2^* Y_1 - L'|$ を考える. すると, $\mathcal{L}$ は base point free であり, X_2 から $\mathbb{P}^6$ への birational morphism $\Phi = \Phi_{\mathcal{L}} : X_2 \longrightarrow \Phi(X_2) \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ を定める. Φ の exceptional set は $x_0 \in X$ をとおる X の conic の X_2 における proper transform のみである. $W = \Phi(X_2)$ とおくと, $\deg W = 4$, こうして W は rational scroll 又は Veronese surface 上の cone である. よって, $b_2(W) = 1$. 一方, $3 = b_2(X_2) = b_2(W)$ より矛盾を生ずる. こうして, Case (b) は起きない. 以上が定理3.1の証明のあらすじである.

<u>定理</u> 3.2 (Peternell–Schneider [12]). Y を <u>non-normal</u> とする. すると, X は index 1, genus 12 の第1種 Fano 3-fold である.

制限 $\pi_{22} : V'_{22} - H'_{22} \xrightarrow{\sim} V_5 - H_5^\infty$ ($\cong \mathbb{C}^3$) は同型である。

<u>問題</u>. index 1 の $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化は, (V'_{22}, H'_{22}) に限るか?

<u>注意</u>. (V'_{22}, H'_{22}), (V_5, H_5^∞), $(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2)$ は, 境界因子の特異点からの射影（又は, 2重射影）でつながっている, 即ち, birational maps

$$V'_{22} \overset{\pi_2}{\dashrightarrow} V_5 \overset{\pi_1}{\dashrightarrow} \mathbb{Q}^2 \overset{\pi_0}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^3 ,$$

但し,
$$\begin{cases} \pi_2 : & \mathrm{Sing}\, H'_{22} \text{ (line) からの2重射影} \\ \pi_1 : & \mathrm{Sing}\, H_5^\infty \text{ (line) からの射影} \\ \pi_0 : & \mathrm{Sing}\, \mathbb{Q}_0^2 \text{ (pt) からの射影} \end{cases}$$

があって,

$$V'_{22} \setminus H'_{22} \underset{\sim}{\overset{\pi_2}{\longrightarrow}} V_5 \setminus H_5^\infty \underset{\sim}{\overset{\pi_1}{\longrightarrow}} \mathbb{Q}^3 \setminus \mathbb{Q}_0^2 \simeq \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^2$$
$$(\cong \mathbb{C}^3)$$

References

[1] T. Fujita : On the structure of polarized

<u>定理</u> 3.3（[5]）． V_{22}' を向井－梅村 [10] によって構成された，index 1，genus 12 の第1種 Fano 3-fold とする．そのとき，V_{22}' の <u>non-normal</u> な超平面切断 H_{22}' で，$V_{22}' - H_{22}' \cong \mathbb{C}^3$ なるものが存在する．

最後に，(V_{22}', H_{22}') の構造についてのべる．

<u>命題</u> 3.4

(1) $\mathrm{Sing}\, H_{22}' =: L$ は V_{22}' における line で，その法束は，$N_{L|V_{22}'} \cong \mathcal{O}_L(-2) \oplus \mathcal{O}_L(1)$ である．

(2) L と交わる V_{22}' のその他の line はない．

(3) H_{22}' は L と交わる V_{22}' 内の conics で張られる ruled surface である．

<u>定理</u> 3.5． L からの 2重射影 π_{2L} は V_{22}' から index 2，genus 21 の第1種 Fano 3-fold V_5 の上への birational map $\pi_{2L}: V_{22}' \dashrightarrow V_5$ を定め，

manifolds with total deficiency one II, J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 415-434.

[2] M. Furushima : Singular del Pezzo surfaces and complex analytic compactifications of the 3-dimensional complex affine space $\mathbb{C}^3$, Nagoya Math. J. 104 (1986) 1-28.

[3] M. Furushima : Singular K-3 surfaces with hypersurface singularities, Pacific J. Math. 125 (1986) 67-77.

[4] M. Furushima : Complex analytic compactifications of $\mathbb{C}^3$, to appear in Compositio Math.

[5] M. Furushima : A note on a compactification of $\mathbb{C}^3$, in preparation.

[6] M. Furushima - N. Nakayama : A new construction of a compactification of $\mathbb{C}^3$, Tohoku Math. J. 41 (1989) 543-560.

[7] M. Furushima – N. Nakayama : The family of lines on the Fano 3-fold V_5, Nagoya Math. J. 116 (1989) 1–12

[8] V.A. Iskovskih : Anticanonical models of three dimensional algebraic varieties, J. Soviet Math. 13–14 (1980), 745–814.

[9]. H. Laufer : On minimally elliptic singularities. Amer. J. Math. 99 (1977) 1257–1295.

[10] S. Mukai – H. Umemura : Minimal rational threefolds, L.N.M 1016 (1983), 490–518

[11] R. Remmert – T. Van de Ven : Zwei Satze über die komplex-projektive ebene, Niew Arch. Wisk. 8 (3) (1960), 147–157.

[12] T. Peternell – M. Schneider, Compactifications of $\mathbb{C}^3$ I Math. Ann. 280 (1988), 129–146

[13]. Y. Umezu ; On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf, Tokyo J. Math. 4 (1981), 343–354.